Concours Général 2000

EXERCICE I

On dispose de b boules blanches et n boules noires – au moins une de chaque –, que l'on répartit entre deux urnes de façon qu'aucune d'elles ne soit vide ; on note s le nombre de boules dans la première, et r celui de celles qui sont blanches. L'événement considéré est le tirage d'une boule au hasard dans l'une des urnes choisie au hasard. Le but de l'exercice est de déterminer les répartitions rendant maximale la probabilité p de tirer une boule blanche.

1. Exprimer p en fonction de b, n, r et s.
2. Dans cette question, l'on fixe la valeur de s ; comment choisir r pour augmenter p ?
3. Résoudre l'exercice.
4. Quelles généralisations proposez-vous en augmentant les nombres de couleurs et d'urnes ?

EXERCICE II

Ce problème traite des triangles ABC dits cartésiens, c'est-à-dire à côtés entiers $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$ dont l'angle en A mesure $\dfrac{2\pi}{3}$ radians. Sauf avis contraire, ABC est supposé cartésien.

1. Notant H son orthocentre orthogonalement projeté en (U, V, W) sur les trois côtés, déterminer les nombres rationnels parmi AU, BV, CW, HA, HB, HC, HU, HV, HW, AW, AV, BU, BW, CV et CU.
2. Notant I son centre du cercle inscrit, J l'intersection de la bissectrice intérieure en A et des bissectrices extérieures en les autres sommets, et P Q les intersections de la droite BC et des deux bissectrices de A, déterminer les nombres rationnels parmi PB, PC, QB, QC, AI, AJ, AP et AQ.
3. On suppose désormais b et c premiers entre eux. Montrer que, quitte à échanger b et c, $a + b - c$ est multiple de 3 et $a - b + c$ ne l'est pas.
4. On pose $\dfrac{a + b - c}{3c} = \dfrac{p}{q}$ où p et q sont des entiers strictement positifs premiers entre eux. Notant d le PGCD de $p(3p + 2q)$ et de $q(2p + q)$, calculer a, b et c en fonction de p, q et d.

5. Montrer que q n'est pas multiple de 3, puis que $d = 1$
6. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un triangle soit cartésien de côtés premiers entre eux puis, par des remarques géométriques, une caractérisation analogue des triangles à côtés entiers $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$ premiers entre eux dont l'angle en A mesure $\frac{\pi}{3}$ radians.

EXERCICE III

Soient A, B, C trois points deux à deux distincts de l'espace, (A) une sphère de centre A et de rayon r, et E l'ensemble des nombres $R > 0$ tels qu'il existe une sphère (H) de centre H et de rayon R par rapport à laquelle les points B et C sont strictement extérieurs (c'est-à-dire par exemple tels que $HB > R$), et les points de (A) strictement intérieurs.

1. Dans cette question, B et C sont alignés avec A et strictement extérieurs à (A). Montrer que E est non vide et majoré. Calculer le plus petit de ses majorants en fonction des données.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que E soit non vide et majoré.
3. Calculer, lorsqu'il existe, le plus petit des majorants de E.