

## Concours Général 1998

1. Un tétraèdre  $ABCD$  vérifie les conditions suivantes
  - (a) les arêtes  $AB, AC, AD$  sont deux à deux orthogonales
  - (b) on a :  $AB = 3$  et  $CD = \sqrt{2}$ .Déterminer la valeur minimale de  $BC^6 + BD^6 - AC^6 - AD^6$ .
2. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle vérifiant, pour tout entier naturel  $n$ , la relation :  $u_{n+2} = |u_{n+1}| - u_n$ .  
Montrer qu'il existe un entier  $p$  non nul tel que la relation :  $u_{n+p} = u_n$  ait lieu pour tout entier naturel  $n$ .
3. Pour tout réel  $x$ , on note  $E(x)$  le plus grand entier relatif inférieur ou égal à  $x$ . Soit  $k$  un entier fixé, supérieur ou égal à 2. On considère la fonction de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  définie par :  $f(n) = n + E((n + n^{1/k})^{1/k})$ .  
Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la fonction  $f$ .
4. On considère deux droites  $D_1$  et  $D_2$  sécantes en  $O$ , et un point  $M$  n'appartenant à aucune de ces droites. On considère deux points variables,  $A$  sur  $D_1$ ,  $B$  sur  $D_2$ , tels que le point  $M$  appartienne au segment  $[AB]$ .  
*Les deux questions sont indépendantes.*
  - (a) Montrer qu'il existe une position des points  $A$  et  $B$  pour laquelle l'aire du triangle  $OAB$  est minimale. Construire les points  $A$  et  $B$  ainsi déterminés.
  - (b) Montrer qu'il existe une position des points  $A$  et  $B$  pour laquelle le périmètre du triangle  $OAB$  est minimal et qu'on a alors l'égalité des périmètres des triangles  $OAM$  et  $OBM$ , ainsi que la relation

$$\frac{AM}{\tan \frac{\widehat{OAM}}{2}} = \frac{BM}{\tan \frac{\widehat{OBM}}{2}}.$$

Construire les points  $A$  et  $B$  ainsi déterminés.

5. Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3. On considère un ensemble  $A$  de  $n$  points du plan, cet ensemble ne contenant pas trois points alignés.  
Montrer qu'il existe un ensemble  $S$  de  $2n - 5$  points du plan tel que, pour tout triangle dont les sommets sont des points de  $A$ , il existe au moins un point de  $S$  qui lui soit strictement intérieur.