Concours Général 1995

1. Dans un plan P, on se donne un triangle ABC. À toute droite D, non parallèle à l'un de ses côtés, on associe le point G_D, isobarycentre des trois points communs à D et aux droites (AB), (BC) et (CA).
   L'objet de l'exercice est de déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points G_D lorsque D varie.
   (a) Démontrer que, lorsque D se déplace en restant parallèle à une droite δ, le point G_D décrit une droite Δ_δ.
   (b) On suppose, dans cette question seulement, ABC équilatéral. Montrer que, lorsque δ varie, les droites Δ_δ sont toutes tangentes à un même cercle et déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ dans ce cas.
   (c) On revient au cas général. Montrer que l'on peut trouver un triangle équilatéral $A'B'C'$ de l'espace dont le projeté orthogonal sur le plan P est le triangle ABC et en déduire l'ensemble $\mathcal{F}$.

2. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \geq 0 \text{ et, pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+1}.$$

3. Dans le plan, on considère Γ_1, Γ_2 et Γ_3, trois cercles de rayon R passant par le point O, et on note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points du plan intérieurs à au moins deux de ces cercles.
   Comment doit-on placer Γ_1, Γ_2 et Γ_3 pour que l'aire de $\mathcal{D}$ soit minimale ? Justifier votre réponse.

4. Soient $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ six points du plan tels que l'on ait : pour tous les entiers i et j de $\{1, 2, 3\}$ $A_iB_j = i + j$.
   Que peut-on dire des six points ?

5. Soit f une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.
   Démontrer que l'on peut trouver trois entiers naturels a, b, c vérifiant :

$$a < b < c \text{ et } f(a) + f(c) = 2f(b).$$