

Concours Général 1992

EXERCICE I

On dit qu'une partie non vide Δ du plan \mathcal{P} est convexe si elle possède la propriété suivante :

– Pour tout couple (M, N) de points de Δ , le segment $[MN]$ est contenu dans Δ .
Soit Δ une partie convexe du plan \mathcal{P} . Si A est un point de \mathcal{P} , à tout couple (M, N) de points de Δ on associe le point m défini par $\vec{Am} = \frac{1}{2} \vec{MN}$ et on note $\delta_A(\Delta)$ l'ensemble des points m ainsi obtenus.

- (a) Montrer que $\delta_A(\Delta)$ admet un centre de symétrie.
(b) À quelle condition a-t-on $\delta_A(\Delta) = \Delta$?
(c) Soit B et C deux points du plan \mathcal{P} . Par quelle transformation passe-t-on de $\delta_B(\Delta)$ à $\delta_C(\Delta)$?
- Soit A un plan du point \mathcal{P} . Déterminer et représenter $\delta_A(\Delta)$ lorsque :
(a) Δ est une bande du plan \mathcal{P} délimitée par deux droites parallèles.
(b) Δ est délimitée par un triangle.
(c) Δ est un demi-disque.
- Montrer que dans les deux cas 2.b. et 2.c., les contours de Δ et $\delta_A(\Delta)$ ont la même longueur.

EXERCICE II

Soit (\mathcal{C}) un cercle du plan de rayon 1.

- Déterminer les triangles inscrits dans le cercle (\mathcal{C}) pour lesquels la somme $AB^2 + BC^2 + CA^2$ est maximale.
- Déterminer les quadrilatères $ABCD$ inscrits dans le cercle (\mathcal{C}) pour lesquels la somme $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2$ est maximale.
Représenter un tel quadrilatère.

EXERCICE III

Soit $ABCD$ un tétraèdre inscrit dans une sphère de centre O . On note G l'isobarycentre des quatre sommets du tétraèdre et I le centre de la sphère inscrite dans le tétraèdre.

Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalents :

- Les deux points O et G sont confondus.
- Les quatre faces du tétraèdre sont isométriques.
- Les deux points O et I sont confondus.

EXERCICE IV

Soit (u_n) la suite numérique définie par la donnée de ses deux premiers termes u_0 et u_1 , $0 < u_0 < 1$ et $0 < u_1 < 1$, et la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = \frac{1}{2}(\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}).$$

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
2. Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0 , la suite (u_n) est monotone (on ne demande pas de déterminer n_0 qui dépend des valeurs initiales u_0 et u_1).

EXERCICE V

Quel est le chiffre des unités du plus grand nombre entier inférieur ou égal à $\frac{10^{1992}}{10^{83}+7}$?